Economia Monetária e Financeira
Aula T4

4. Teoria da carteira

4.1. Rendimento e risco de um activo financeiro

4.2. Rendimento e risco de uma carteira de activos financeiros

- **Bibliografia**

M. Abreu, A. Afonso, V. Escária, C. Ferreira, *Economia Monetária e Financeira*, 3ª edição, Escolar Editora, 2018, CAP 4.

Rendimento e risco de um activo financeiro (1/2)

- Rendimento de um activo financeiro

$$\boxed{\bar{R}_i = E(R_i) = \sum_{m=1}^{M} P_{im} R_{im}}$$

$\bar{R}_i$ - valor esperado do rendimento do activo *i*;
m - taxas de rendimento possíveis, *(m = 1, …, M)*;
P_{im} - probabilidade associada a cada taxa de rendimento R_{im} $(\Sigma P_{im} = 1)$.

- Risco medido em termos da variância

$$\boxed{\sigma_i^2 = \sum_{m=1}^{M} P_{im} \left[R_{im} - E\left(R_i\right) \right]^2}$$

Rendimento e risco de um activo financeiro (2/2)

- Exemplo:

Possibilidade	Probabilidade	Rendimento (%)
1	1/3	12
2	1/3	9
3	1/3	6

- $\bar{R}_i$ = 1/3 (12) + 1/3 (9) + 1/3 (6) = 1/3 (27) = 9%.

$$\sigma_i^2 = \sum_{m=1}^{3} P_{im} \left[R_{im} - 9 \right]^2 =$$

$$= (1/3)(12-9)^2 + (1/3)(9-9)^2 + (1/3)(6-9)^2 = 6\%$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = \sqrt{6} \cong 2{,}45\%$$

Hipóteses do modelo de Markowitz

1. Os investidores são racionais, têm aversão ao risco.
2. A diversificação reduz o risco – activos com diferentes graus de risco numa carteira, reduzindo o risco global.
3. Os investidores maximizam a utilidade da riqueza no final do período, havendo um *trade off* entre rendimento e risco.
4. Os investidores têm expectativas idênticas, atribuem a mesma probabilidade às taxas de rendimento esperadas dos títulos.
5. O mercado financeiro é eficiente: nenhum investidor isoladamente influencia as cotações; a informação circula livremente; as cotações reflectem sempre a informação disponível.
6. Não se levam em conta os impostos ou custos de transacção.
7. Os títulos são infinitamente divisíveis.

Harry Markowitz (1952). “Portfolio selection”, *Journal of Finance*, 7 (1), 77-91.

Rendimento e risco de uma carteira de activos (1/6)

- Rendimento de uma carteira

$$\overline{R}_p = E(R_p) = \sum_{n=1}^{N} x_i \overline{R}_i$$

$\overline{R}_p$ - valor esperado da taxa de rendimento da carteira *p*;
x_i - peso do activo *i* na carteira *($\Sigma x_i = 1$);*
$\overline{R}_i$ - taxa de rendimento do activo *i*;
n - número de activos que compõem a carteira *p* (n = 1, ..., N).

Rendimento e risco de uma carteira de activos (2/6)

- Risco da carteira, 2 activos, medido em termos da variância

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^{M} P_m \left[\mathrm{R}_{im} - \mathrm{E}(\mathrm{R}_i)\right]\left[\mathrm{R}_{jm} - \mathrm{E}(\mathrm{R}_j)\right]}$$

σ_{ij} = covariância entre os activos i e j;

m - número de taxas de rendimento possíveis, (m=1, …, M);

P_m - probabilidade das possibilidades de rendimento, (ΣP_m=1);

R_{im} - possibilidades de rendimento do activo i (m=1, …, M);

E (R_i) - valor esperado do rendimento do activo i;

R_{jm} - possibilidades de rendimento do activo j (m=1, …, M);

E (R_j) - valor esperado do rendimento do activo j.

Rendimento e risco de uma carteira de activos (3/6)

- Risco de uma carteira com N activos

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i^2\sigma_i^2) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} x_i x_j \boxed{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

x_i, x_j - pesos dos activos *i* e *j* na carteira,
σ_i, σ_j - risco dos activos *i*, *j*.

- Covariância e coeficiente de correlação, ρ_{ij}:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i^2\sigma_i^2) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{N} x_i x_j \boxed{\sigma_{ij}}$$

Rendimento e risco de uma carteira de activos (4/6)

- Coeficiente de correlação entre 2 activos, ρ_{ij}:

- **3 casos particulares**:
  - ρ_{ij}= -1 → associação perfeita, negativa, entre as taxas de rendimento dos dois activos;
  - ρ_{ij}= 1 → associação perfeita, positiva, entre as taxas de rendimento dos dois activos;
  - ρ_{ij}= 0 → os dois activos são independentes, taxas de rendimento não correlacionados.

Rendimento e risco de uma carteira de activos (5/6)

- Exemplo de **carteira com 2 activos**, composta por 30% de activo 1 e 70% de activo 2:

Probabilidade	Retorno activo 1 (%)	Retorno activo 2 (%)
1/3	12	14
1/3	9	10
1/3	6	6

- Obtém-se: E(R1)=9%, E(R2)=10%.
- $E(R_p)$= (0,3x 9) + (0,7x10)=9,7%.

$$\boxed{\overline{R}_p = E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2) = x_1 E(R_1) + (1 - x_1) E(R_2)}$$

Rendimento e risco de uma carteira de ativos (6/6)

- Para calcular o risco da carteira é preciso obter:
  - O risco de cada ativo: σ_1^2= 6%, σ_2^2=10,67%.
  - A covariância entre os rendimentos dos 2 ativos: σ_{12}=8.
  - Sendo o coeficiente de correlação:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{8}{\sqrt{6}\sqrt{10,67}} = 1$$

- No **caso de 2 ativos**, a expressão geral do **risco da carteira** é:

$$\boxed{\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}$$

- Neste exemplo, o risco é:

$$\sigma_p^2 = 0,3^2 \times 6 + 0,7^2 \times 10,67 + 2 \times 0,3 \times 0,7 \times 8 = 9,127$$

$$\sigma_p = \sqrt{9,127} = 3,021$$